

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记19——数值积分

什么是数值积分

数值积分是计算定积分数值的方法和理论。在数学分析中，给定函数的定积分的计算不总是可行的。许多定积分不能用已知的积分公式得到精确值。数值积分是利用黎曼积分等数学定义，用数值逼近的方法近似计算给定的定积分值。借助于电子计算设备，数值积分可以快速而有效地计算复杂的积分。

数值积分的必要性源自计算函数的原函数的困难性。利用原函数计算定积分的方法建立在牛顿-莱布尼兹公式之上。然而，原函数可以用初等函数表示的函数为数不多，大部分的可积函数的积分无法用初等函数表示，甚至无法有解析表达式。例如常见的正态分布函数：

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

的原函数就无法用初等函数表示。

不仅如此，在很多实际应用中，只能知道积分函数在某些特定点的取值，比如天气测量中的气温、湿度、气压等，医学测量中的血压、浓度等等。另外，积分函数有可能是某个微分方程的解。由于很多微分方程只能数值求解，因此只能知道函数在某些点上的取值。这时是无法用求原函数的方法计算函数的积分的。

另外，当积分区域是曲面、三维形体以至于高维流形时，牛顿-莱布尼兹公式不再适用，只能使用更广泛的格林公式或斯托克斯公式，以转化为较低维数上的积分，但只能用于少数情况。因此，只能使用数值积分计算函数的近似值。

数值积分的常见公式

矩形公式

就是常见的黎曼和，在切割小矩形时，可选择使用左矩形或右矩形。

左矩形公式：

$$S_{\text{左矩形}} \approx (y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\Delta x$$

右矩形公式：

$$S_{\text{右矩形}} \approx (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\Delta x$$

左右矩形公式的区别如下图所示：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

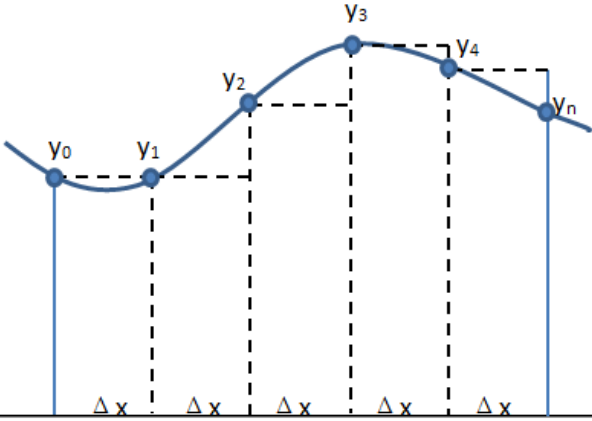
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

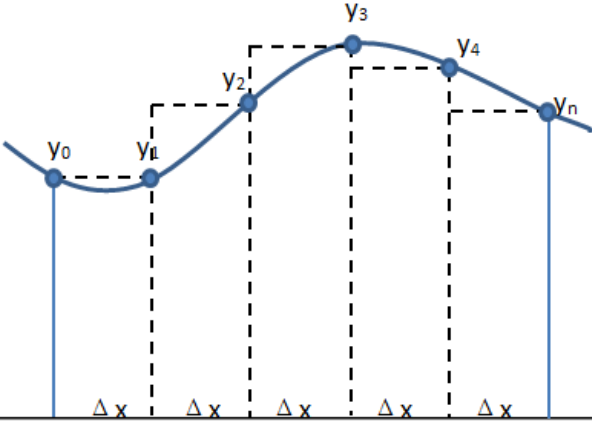
- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



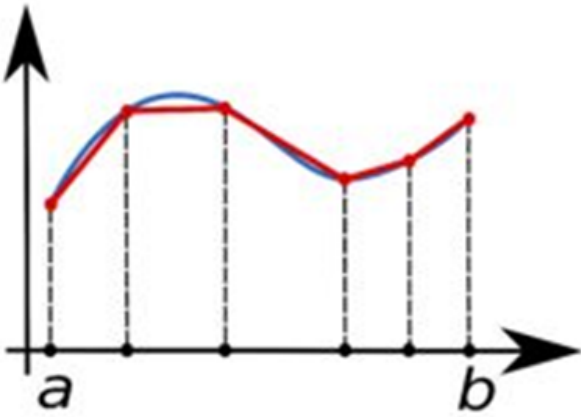
左矩形公式



右矩形公式

梯形公式

与矩形公式不同，梯形公式直接将点连接，当 $\Delta x \rightarrow \infty$ 时，这看起来更接近于与真实面积：



2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)
很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

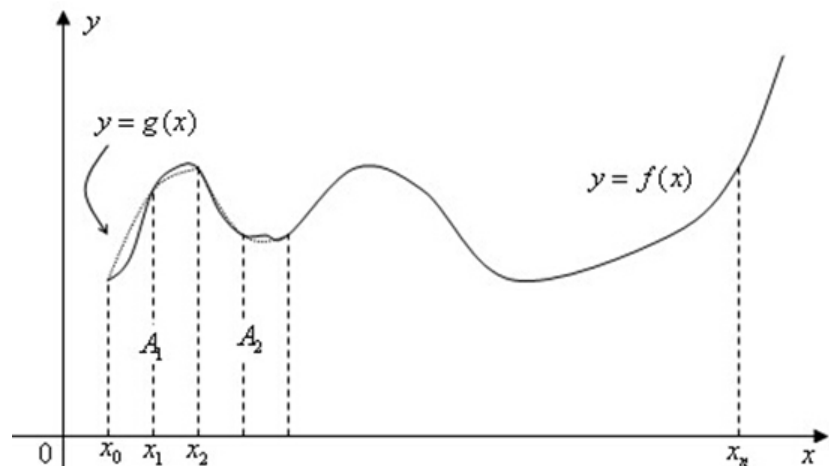
$v = \sqrt{2gh}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\begin{aligned} S &\approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) \Delta x \\ &= \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) \Delta x \\ &= \frac{(S_{\text{左矩形}} + S_{\text{右矩形}})}{2} \end{aligned}$$

辛普森公式

辛普森公式是更高级并且在实际中精确度更高的公式，它的核心思想是面积 $\approx$ 底边长 $\times$ 平均高度。高度是加权重的，为了计算平均高度，试图将点用抛物线相连，每个抛物线连接三个相邻的点：



这里直接给出结果。上图从 x_0 到 x_2 的面积可计为：

$$S_{x_0 \sim x_2} \approx 2\Delta x \frac{(y_0 + 4y_1 + y_2)}{6}$$

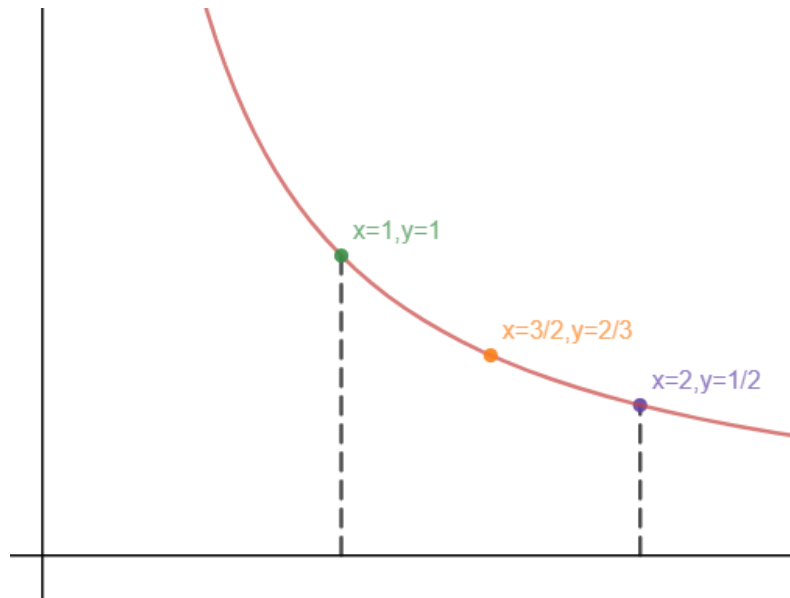
总面积：

$$S \approx \frac{\Delta x}{3} ((y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n))$$

数值积分的应用

示例1

计算 $y = 1/x$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 之间与x轴围成的面积：



下面是不同计算方法的对比。

实际面积：

$$S = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 \approx 0.693147$$

梯形公式：

$$S \approx \Delta x \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \frac{y_2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \approx 0.708$$

辛普森公式：

$$S \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right) \approx 0.6944$$

这个例子中，辛普森公式远比梯形公式精确，实际上， $|\text{真实值} - \text{辛普森值}| \approx (\Delta x)^4$ ，如果 $\Delta x = 0.1$ ，辛普森值将非常接近真实值。

示例2

用梯形公式和辛普森公式估算 $\int_0^\pi \sin x dx$ ， $\Delta x = \pi/4$

梯形公式：

$$\begin{aligned} S &\approx \Delta x \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{\sin 0}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\sin \pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} (1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

辛普森公式：

$$S \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = \frac{\pi}{4} (1 + 2\sqrt{2})$$

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [梯形公式](#), [辛普森公式](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记18——定积分的应用3 \(均值、权重、概率\)](#)
» 下一篇: [单变量微积分笔记20——三角替换1 \(sin和cos\)](#)

posted on 2017-11-13 22:45 我是8位的 阅读(2610) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office 文档在线编辑 APIs

打开

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月6日-3月18日

最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes